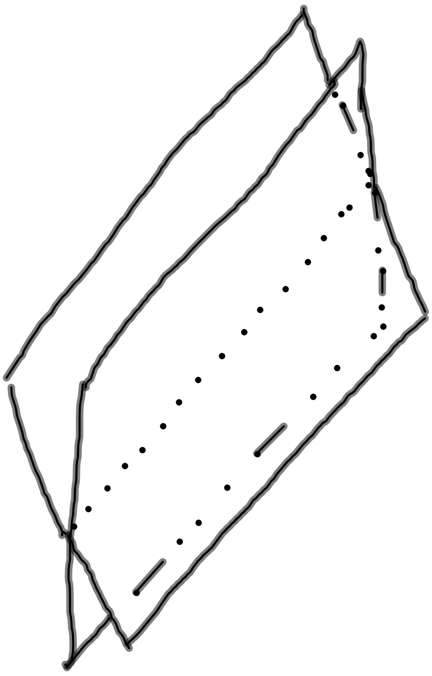
$V(P)$, U', U'' podprostory

$$U' + U'' = \{ u' + u'' \mid u' \in U',\ u'' \in U'' \}$$

je podprostor.

<u>Teorem!</u> U', U'' podprostory V. Pak

$$\dim U' + \dim U'' = \dim (U' + U'') + \dim (U' \cap U'').$$



PŘÍMÝ SOUČET PODPROSTORŮ

$V(P)$, $U_1, \dots, U_n$ podprostory, Součet $U_1 + \dots + U_n$ se nazývá PŘÍMÝ, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze napsat právě jedním způsobem jako $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$.

Zapisujeme $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$.

<u>Tvrzení</u> $V = U_1 \dot{+} U_2 \iff$

$$V = U_1 + U_2 \,,\quad U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

<u>Tvrzení</u> $V(P)$ konečněrozm.

U_1, U_2 podprostory. $V = U_1 + U_2$.

Pak

$$V = U_1 \dot{+} U_2 \iff \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 .$$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

U, V vekt. prostory nad P. Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá LINEÁRNÍ nad polem P, když $\forall a,b \in U$, $\forall r \in P$ platí

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2) $f(ra) = r f(a)$

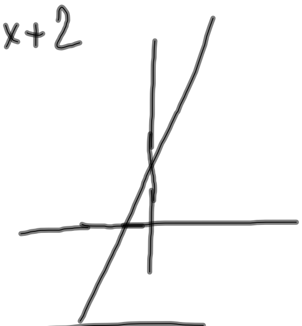
Př.: 1) $id: U \to U$, $id(a) = a$.
2) $0: U \to U$, $0(a) = 0$
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}$

$f(x+y) = 3 \cdot (x+y)$
$= 3 \cdot x + 3 \cdot y$

$f(x) + f(y) = 3x + 3y$

$f(x) = x + 2$



4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Tvrzení $f: U \to V$, $g: V \to W$ lin. zobr.

Pak $g \circ f : U \to W$ je lineární.

Důkaz $a, b \in U$, $r \in P$

$$(g \circ f)(a+b) = g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b))$$

$$= g(f(a)) + g(f(b)) = (g \circ f)(a) +$$

$$+ (g \circ f)(b)$$

$$(g \circ f)(ra) = g(f(ra)) = g(r f(a)) =$$

$$= r g(f(a)) = r (g \circ f)(a)$$

JÁDRO A OBRAZ

$f: U \to V$ lin. zobr.

$\operatorname{Ker} f = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$

se nazývá JÁDRO zobr. f.

$\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in U\} = f(U)$

$= \{v \in V \mid \exists u : v = f(u)\}$

se nazývá OBRAZ zobr. f.

Tvrzení $f: U \to V$ lin. zobr.

1) $\operatorname{Ker} f$ je podprostor v U.
2) $\operatorname{Im} f$ je podprostor v V.

Důkaz 1) $f(a) = f(b) = 0$

$f(a+b) = f(a) + f(b) = 0$

$f(ra) = r f(a) = 0$.

2) DÚ.

Tvrzení $f: U \to V$ lin. zobr.

1) f je injektivní $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$.
2) f je surjektivní $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V$.

Tvrzení $f: U \to V$ lin. zobr., U, V konečněrozm.

Pak $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U$.

IZOMORFISMY

IZOMORFISMUS vekt. prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení $f: U \to V$ izomorfismus.

Pak $f^{-1}: V \to U$ je izomorfismus.

Vekt. pr. U, V jsou IZOMORFNÍ, když mezi nimi ex. izomorfismus.